Avvio alla dimostrazione come comportamento razionale: un'esperienza nella scuola secondaria di primo grado

FRANCESCA MORSELLI – MONICA TESTERA

1. Introduzione

Il presente contributo si situa nel contesto del progetto a lungo termine "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica", avviato nel 2007 dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova nel quadro del Piano Nazionale Lauree Scientifiche.

Il progetto ha come scopo quello di mettere a punto e proporre in classe percorsi ed attività ad ampio respiro, in campi di esperienza significativi, attorno al "nodo" dell'argomentazione in campo matematico. Tali percorsi e attività sono rivolti a studenti di tutti i livelli scolari (dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado, in una prospettiva di continuità verticale), e sono finalizzati allo sviluppo di competenze argomentative e, negli ordini di scuola superiori, a promuovere un ingresso significativo nella "cultura dei teoremi" (Boero, 2007). In particolare qui si fa riferimento all'esperienza maturata nella scuola secondaria di primo grado. Per una descrizione più estesa delle modalità di lavoro all'interno del progetto, si veda (Morselli & Testera, 2010; Morselli, 2013; Morselli & al., 2015).

Nella prima parte del contributo si illustrano brevemente i riferimenti teorici utili per inquadrare l'avvio al dimostrare come comportamento razionale; nella seconda parte, si utilizzano esempi significativi tratti da uno dei percorsi sperimentati per illustrare aspetti del primo approccio al dimostrare come comportamento razionale.

2. Dimostrare come comportamento razionale

Nella ricerca in didattica della matematica trova ampio spazio l'idea di promuovere un avvio alla *cultura dei teoremi* (Boero, 2007) che parta già dalla scuola di base. Seguendo Balacheff (1987), si può distinguere tra *spiegazione*, *prova* e *dimostrazione*. La *spiegazione* è un discorso che ha lo scopo di mostrare il carattere di verità di una proposizione o di un risultato.

La *prova* è una spiegazione accettata da una determinata comunità: i criteri di accettabilità sono relativi ad una comunità fissata in un momento storico fissato. La *dimostrazione* è una prova strutturata secondo regole precise, condivise all'interno della comunità dei matematici. L'insegnamento della dimostrazione, sempre secondo Balacheff, dovrebbe avere la doppia finalità di portare gli studenti a comprendere che cosa è una dimostrazione, e poi a produrre in prima persona una dimostrazione, curando quindi tanto la dimostrazione come prodotto (dimostrazione come oggetto matematico che deve soddisfare alcuni requisiti stabiliti dalla comunità di riferimento, sia essa la scuola o la comunità dei matematici professionisti) che come processo (un caso speciale di problem solving, come rilevato anche da Weber, 2005; un processo intenzionalmente volto alla creazione del prodotto dimostrazione). Promuovere una cultura dei teoremi significa dunque portare gli studenti a comprendere l'essenza e le funzioni della dimostrazione, e a saper apprezzare e costruire dimostrazioni in prima persona, con attenzione tanto al processo quanto al prodotto finale. Deriva una particolare cura per gli aspetti di controllo e di comunicazione, che trova piena risonanza nel costrutto di comportamento razionale, ripreso dal filosofo Habermas (Habermas 1999; trad. it. 2001) e adattato al caso della matematica. Habermas individua tre componenti di un comportamento razionale:

– razionalità epistemica: conosciamo qualcosa sullo scopo o sui mezzi di un'azione quando "sappiamo perché è vero", convinti di sapere perché le affermazioni relative sono vere o false. Un'opinione è razionale quando è possibile motivarla in un dato contesto;
– razionalità teleologica: si agisce razionalmente quando si agisce in base ad uno scopo e si persegue lo scopo con mezzi intenzionalmente scelti e messi in opera;
– razionalità comunicativa: si comunica razionalmente quando si scelgono consapevolmente i mezzi per rendere efficace la comunicazione.

Secondo Habermas, la razionalità si manifesta nell'azione condotta secondo pretese di validità, cioè un individuo agisce avendo uno scopo e la sua azione è coerente con tale scopo (tale coerenza deve essere accertabile dall'esterno del soggetto, nel contesto socio-culturale in cui si colloca l'azione). Inoltre, la razionalità si manifesta nel rendere conto del proprio agire secondo pretese di validità, il che significa che il soggetto è capace, nella comunicazione con se stesso e con gli altri, di giustificare le sue azioni mettendole in rapporto con lo scopo da raggiungere. La definizione di Habermas è stata oggetto di un adattamento nel campo della didattica della matematica (Boero & Morselli, 2009; Boero et al., 2010). Tale adattamento nasce dal fatto che la definizione di

Habermas è fortemente centrata sull'individuo (considerato come "membro di una comunità") e poi perché si basa sull'attività e sulla giustificazione di tale attività all'interno della comunità. Intendendo la dimostrazione come un processo, in cui l'individuo è impegnato nella risoluzione di un problema e al tempo stesso nella costruzione di un prodotto finale sottoposto a regole di comunicazione stabilite dalla comunità di riferimento (la classe, la comunità dei matematici, …), si può adattare la descrizione di Habermas e descrivere la dimostrazione come un comportamento razionale. Sulla base di tale adattamento, rientra nella razionalità epistemica la giustificazione delle affermazioni fatte, nella razionalità teleologica la scelta consapevole di mezzi ritenuti adeguati in modo giustificabile e condivisibile in relazione agli scopi, nella razionalità comunicativa la scelta di mezzi comunicativi ritenuti idonei per raggiungere l'interlocutore.

Per una discussione approfondita sulla razionalità del dimostrare nel caso particolare della dimostrazione algebrica si veda anche (Morselli, 2015).

Nel presente contributo proponiamo alcune riflessioni su come promuovere un graduale ingresso nella cultura dei teoremi nella scuola secondaria di primo grado, curando il primo incontro con il dimostrare inteso come comportamento razionale.

Nell'avvio alla cultura dei teoremi si ritiene importante promuovere in primo luogo lo sviluppo delle competenze linguistiche e argomentative (riconoscendo lo stretto legame tra argomentazione e dimostrazione, Durand-Guerrier & al., 2012), in secondo luogo incontri significativi con le prime dimostrazioni matematiche, viste come processi e come prodotti.

Un'introduzione graduale e significativa alla dimostrazione richiede la progressiva acquisizione di conoscenze a livello di contenuto, ma anche la capacità di gestire (da un punto di vista logico e linguistico) i passi di ragionamento e la loro concatenazione e l'abilità di comunicare gli argomenti in maniera comprensibile. Questo corrisponde a curare lo sviluppo e la presa di coscienza delle dimensioni epistemica, teleologica e comunicativa del dimostrare visto come comportamento razionale.

Nel seguito si presentano alcuni episodi da una delle sperimentazioni realizzate, allo scopo di mostrare come consegne appositamente progettate abbiano condotto gli studenti alla presa di coscienza delle caratteristiche salienti del processo dimostrativo inteso come comportamento razionale.

I rettangoli isoperimetrici: il percorso progettato

Il percorso sui rettangoli isoperimetrici è stato progettato congiuntamente dagli insegnanti di tutti i livelli scolari. Il percorso ha un contenuto comune (i rettangoli isoperimetrici) e si declina in modo diverso nei diversi livelli scolastici (scuola primaria, secondaria di primo grado e secondaria di secondo grado), in un'ottica di continuità verticale. Il presente contributo si riferisce alla versione per la scuola secondaria di primo grado. Per un approfondimento sui diversi cicli di sperimentazione effettuati e sulle variazioni nelle singole classi, si veda (Morselli & al., 2015). Qui facciamo riferimento alla sperimentazione effettuata in una classe seconda nell'anno scolastico 2012-13.

Nelle sessioni si alternano momenti di lavoro individuale, lavoro in piccoli gruppi, discussioni matematiche (Bartolini Bussi, 1996). I gruppi sono omogenei per livello, in modo da favorire una reale partecipazione di tutti gli studenti.

Il percorso inizia con la costruzione di rettangoli aventi lo stesso perimetro (disegnati su carta e poi ritagliati nel cartoncino) e continua con l'esplorazione della situazione e la produzione di congetture sull'area massima. A una prima ricerca di giustificazioni del fatto che *tra tutti i rettangoli aventi la stessa area il quadrato è quello con area massima*, segue una dimostrazione algebrica, costruita in forma di discussione con una forte mediazione dell'insegnante.

Il percorso termina con alcune attività appositamente progettate per promuovere la presa di coscienza delle caratteristiche salienti del processo dimostrativo e delle richieste specifiche relative al prodotto finale, cioè la *dimostrazione per via algebrica*. Dapprima gli studenti ricostruiscono la dimostrazione (con l'aiuto di una scheda guidata); le ricostruzioni individuali sono poi confrontate e analizzate nel corso di una discussione di classe. Il percorso si conclude con una scheda di "*looking back*" sull'intero percorso svolto, con domande mirate a far riflettere sulla difficoltà e utilità di ogni tappa, con particolare riferimento alle diverse modalità di lavoro (disegno, ritaglio su cartoncino, uso delle lettere, …).

Nel paragrafo successivo proponiamo una narrazione dello svolgimento del percorso, con estratti dalle risposte individuali e di gruppo. L'analisi fine si concentra poi sulle risposte alla consegna di "*looking back*" conclusiva.

I rettangoli isoperimetrici: il percorso sperimentato

La prima consegna, svolta individualmente dagli studenti, è la seguente: *Disegna quattro rettangoli aventi tutti lo stesso perimetro di 20 cm.*

Successivamente gli studenti, divisi in gruppi, svolgono la consegna della seconda scheda: *Confrontate i metodi seguiti per disegnare i diversi rettangoli.* La scheda chiede di esplicitare e mettere a confronto i metodi utilizzati per la costruzione dei rettangoli; si passa così dalla risoluzione di un problema (costruire i rettangoli) alla descrizione della strategia adottata. Come evidenziato in (Morselli & Levenson, 2014), la richiesta di confronto tra i metodi promuove un passaggio dalla mera esecuzione della consegna, alla descrizione del metodo utilizzato, fino alla sua giustificazione.

La strategia più diffusa consiste nel passare dalla richiesta iniziale (perimetro pari a 20 cm) a una richiesta equivalente (semiperimetro pari a 10 cm). In questo modo il problema geometrico della costruzione dei rettangoli si riconduce a un problema di tipo aritmetico, ovvero determinare due numeri la cui somma sia 10. Come mostrano i seguenti estratti dai lavori di gruppo, gli studenti trovano senza difficoltà coppie di numeri la cui somma sia 10, aiutati anche dalla conoscenza, che risale alla scuola primaria, degli "amici del 10".

Gruppo 1
Per formare i rettangoli con il perimetro 20 cm bisogna formare 10 cm e poi moltiplicare per 2. Con questo metodo si posso formare 9 rettangoli: 6+4, 7+3, 8+2, 9+1, 4+6, 3+7, 2+8 e 1+9, però il primo, secondo, terzo e quarto sono uguali agli ultimi quattro. 5+5 non si può fare perché si forma un quadrato.
Gruppo 2
Abbiamo sommato due lati diversi la cui somma era 10 che moltiplicato per due il risultato era 20, ovvero il perimetro del rettangolo. Non sono possibili altri perimetri di 20 cm se non con questi lati 6 cm + 4 cm ×2, 8+2 cm ×2, 9+1 cm ×2, 7+3 cm ×2. 5+5+5+5 cm =20 non è un rettangolo, ma un quadrato. 10+10 cm = 20 cm, ma non è un rettangolo.

Una prima analisi delle risposte alle schede 1 e 2 mette in evidenza alcuni comportamenti ricorrenti. In primo luogo, gli studenti costruiscono rettangoli aventi misure intere (in centimetri). Questo è comprensibile, dal momento che la scheda 1 richiede di costruire un numero limitato di rettangoli e quindi è possibile fornire la risposta senza "scomodare" le misure non intere. D'altro canto, le risposte (in particolare la risposta del gruppo 2: *non sono possibili altri perimetri di 20 cm*) rendono necessario, nella successiva discussione di classe, far riflettere gli studenti sul fatto che *sono possibili* altri rettangoli con lati aventi misura non intera. Altro elemento osservato è la mancata inclusione del quadrato tra i rettangoli aventi perimetro pari a 20 cm. Anche questa questione è oggetto di un momento di approfondimento nella successiva discussione di classe.

Dopo la discussione, i ragazzi, lavorando in piccoli gruppi, ritagliano nel cartoncino una serie di rettangoli aventi lo stesso perimetro assegnato.

Successivamente, gli studenti sono invitati a produrre congetture sull'area dei rettangoli isoperimetrici. La prima consegna è proposta individualmente, per poi passare ad un confronto in piccolo gruppo:

> *Tutti i rettangoli che avete disegnato hanno lo stesso perimetro: rettangoli di questo tipo si dicono rettangoli isoperimetrici. Che cosa puoi dire delle loro aree? Sono tutte uguali?*

A titolo di esempio si riportano alcune risposte, che evidenziano la presenza di argomentazioni di carattere numerico (basate sul fatto, verificato mediante esempi, che due numeri aventi la stessa somma non hanno necessariamente lo stesso prodotto) o geometrico (basate sulla sovrapposizione delle figure ritagliare nel cartoncino). Da rilevare che entrambe le argomentazioni sono di tipo pragmatico (Balacheff, 1982): mostrano che le aree non sono tutte uguali verificando l'affermazione su esempi.

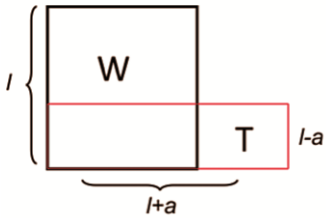
No [le aree non sono tutte uguali] perché se si sovrappongono i rettangoli si vede che lo spazio che occupano è diverso: uno ne occupa di meno e uno di più.
Secondo me le aree sono diverse visto che l'area è un prodotto: se si fa per esempio 1×9 verrebbe 9, se invece si fa 2×8 verrebbe 16 quindi se il perimetro del rettangolo è uguale e il rettangolo è diverso, l'area non sarà uguale tra i diversi rettangoli.

Segue una consegna da svolgere direttamente in piccolo gruppo, in cui si chiede in maniera esplicita di individuare il rettangolo di area massima: *Tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quale pensate sia quello con l'area maggiore? Come avete fatto a capirlo?* Questo un esempio di risposta accompagnata da tentativo di spiegazione, ancora basato sulla sovrapposizione:

Noi pensiamo che quello con area maggiore sia il numero 1 [il quadrato] perché li abbiamo confrontati sovrapponendoli.

La sequenza delle due consegne porta tutti i gruppi a congetturare che l'area massima si ottiene per il quadrato. Passaggio fondamentale, una volta prodotta la congettura, è arrivare a dimostrarla. Come già osservato, i ragazzi si affidano inizialmente a considerazioni di tipo pragmatico (verifiche sperimentali mediante la sovrapposizione delle figure in cartoncino, confronto tra le misure delle aree). Scopo del seguito del percorso è rendere gli studenti consapevoli della necessità di una spiegazione che abbia carattere di generalità, e poi guidarli nella costruzione di tale dimostrazione. Tale passaggio si realizza nel corso di una dimostrazione guidata per via algebrica, costruita alla lavagna nel corso di una lezione dialogata condotta dall'insegnante. Si sceglie di proporre una dimostrazione per via algebrica perché la sequenza didattica sui rettangoli isoperimetrici si inserisce in un percorso a lungo termine sull'avvio al linguaggio algebrico come strumento di pensiero (Morselli & Boero, 2011).

Si riporta qui la dimostrazione, nella forma costruita in classe.



Sovrappongo quadrato e rettangolo come in figura. Per provare che l'area del quadrato è maggiore dell'area del rettangolo mi basta provare che l'area di W è maggiore dell'area di T, perché l'altra parte di figura è in comune.
Chiamo $\boldsymbol{l}$ *la misura del lato del quadrato. I lati del rettangolo misurano* $\boldsymbol{l - a}$ *e* $\boldsymbol{l + a}$ *(per un certo* $\boldsymbol{a}$ *positivo,* $\boldsymbol{a < l}$*).*
La base di T misura $\boldsymbol{a}$ *(è la quantità aggiunta a* $\boldsymbol{l}$ *per avere un rettangolo isoperimetrico al quadrato).*
L'altezza di W misura anch'essa $\boldsymbol{a}$ *(è la quantità tolta a* $\boldsymbol{l}$ *per avere un rettangolo isoperimetrico al quadrato).*
Quindi l'area di W misura $\boldsymbol{l \times a}$ *e l'area di T misura* $\boldsymbol{(l - a) \times a}$*.*
Poiché $\boldsymbol{l > l - a}$*, posso concludere che* $\boldsymbol{(l - a) \times a > l \times a}$ *cioè che l'area del rettangolo è minore dell'area del quadrato.*

La dimostrazione è costruita sotto la guida dell'insegnante, perché non si ritiene alla portata degli studenti di scuola secondaria di primo grado la produzione autonoma di una dimostrazione per via algebrica; questo non deve però rendere la presentazione della dimostrazione un momento di mera lezione frontale in cui gli studenti assistono passivamente o, peggio ancora, ricopiano i passaggi scritti alla lavagna per poi impararli a memoria. La dimostrazione non è presentata come *prodotto* finito: l'insegnante dalla lavagna coinvolge gli studenti nel *processo* dimostrativo, rendendoli partecipi degli elementi che caratterizzano la costruzione della dimostrazione come attività di problem solving (Weber, 2005).

Particolare cura è riservata al discorso metamatematico che accompagna il processo dimostrativo, discorso che si può ricondurre alle diverse componenti del dimostrare inteso come comportamento razionale. Inizialmente, l'insegnante disegna alla lavagna un quadrato, sottolineando che si tratta di un quadrato generico: per tutto il corso della dimostrazione non si potranno utilizzare informazioni facenti riferimento al particolare quadrato disegnato, quali per esempio la misura del lato di quel particolare quadrato. Successivamente, l'insegnante disegna un rettangolo avente lo stesso perimetro. Anche in questo caso, non occorre conoscere le misure specifiche del rettangolo: ai fini della dimostrazione si dovrà solo utilizzare il fatto che i due rettangoli, di cui uno in particolare è quadrato, hanno uguale perimetro. Da notare che si è compiuta una generalizzazione rispetto al problema posto in precedenza: le consegne precedenti chiedevano di individuare il rettangolo di area massima tra tutti i rettangoli aventi perimetro pari a 20 cm, nel momento in cui si passa alla dimostrazione algebrica si considera un quadrato generico e poi un rettangolo di uguale perimetro, senza però fare a riferimento a un particolare perimetro.

Il fatto di basarsi su figure generiche garantirà la generalità della dimostrazione ottenuta: questo rientra nella dimensione epistemica. Il fatto di disegnare il rettangolo sovrapposto al quadrato rientra invece nella dimensione teleologica: poiché lo scopo è confrontare area di quadrato e rettangolo, è utile sovrapporre le figure e poi confrontare le due parti non coincidenti.

Anche la scelta di utilizzare le lettere per condurre la dimostrazione rientra nella razionalità del dimostrare: dal punto di vista epistemico, utilizzando le lettere si garantisce la generalità della dimostrazione (non si fa riferimento alle particolari misure delle figure disegnate); dal punto di vista teleologico, la formalizzazione e i successivi trattamenti algebrici devono essere non solo corretti, ma funzionali allo scopo finale (confrontare le due espressioni algebriche delle aree). Inoltre, dai punti di vista epistemico e teleologico è importante gestire la dialettica tra formalizzazione e interpretazione: per rappresentare algebricamente le misure di T e W è necessario non "scomodare" troppe lettere, bensì usare le relazioni esistenti tra le figure (il fatto che quadrato e rettangolo sono isoperimetrici).

Questi ed altri elementi del discorso metamatematico sono introdotti dall'insegnante nel corso della dimostrazione guidata. Obiettivo del percorso è che tali elementi di discorso metamatematico passino agli studenti, perché sono il primo passo per la loro presa di coscienza di elementi salienti del processo di dimostrazione inteso come comportamento razionale. A tal fine, è predisposta una scheda di ricostruzione a posteriori del processo dimostrativo, che gli studenti compilano individualmente nella lezione successiva. In tale scheda sono riportati i passaggi della dimostrazione guidata (che quindi non devono essere richiamati a memoria) e gli studenti devono, per ogni passaggio, rispondere a domande mirate di tipo metamatematico.

Per esempio, è presentata la figura di partenza (un rettangolo sovrapposto al quadrato) e gli studenti devono completare la seguente frase: *Costruisco la figura in questo modo perché il mio scopo è… e quindi…* L'accento è chiaramente sulla dimensione teleologica.

Nel momento in cui si osserva che, se il quadrato di partenza ha lato l, il rettangolo di partenza ha lati l-a e l+a, gli studenti devono completare la seguente frase: *Qui uso il fatto che quadrato e rettangolo di partenza sono isoperimetrici. Se il rettangolo di partenza non fosse isoperimetrico al quadrato non potrei dire* *che i suoi lati misurano l+a e l-a perché*… A titolo di esempio, uno studente risponde: "*Perché non avrebbero le stesse lettere*", un altro "*Perché le misure sarebbero poi diverse quindi l+a e l-a potrebbero essere l+b e l-b*".

Le schede individuali costituiscono la partenza per una discussione di bilancio in cui estratti significativi delle risposte sono analizzati e confrontati.

I rettangoli isoperimetrici: zoom sulla scheda di "looking back"

Il percorso si conclude con la scheda di "*looking back*", in cui gli studenti sono invitati a fare un bilancio sull'intera sequenza di attività, guidati dalla seguente consegna:

> *Ripercorrendo le schede fatte sui rettangoli isoperimetrici, puoi osservare che abbiamo lavorato sul problema dei rettangoli isoperimetrici seguendo approcci diversi: disegnando rettangoli su carta, ritagliando rettangoli di cartoncino, disegnando due figure sovrapposte, usando le lettere.*
> *Che cosa puoi dire di questi diversi approcci?*
> *Ti hanno permesso di capire le stesse cose?*
> *Sono stati ugualmente facili da seguire?*

Qui di seguito una selezione di risposte individuali, analizzata in termini di componenti della razionalità allo scopo di discutere l'efficacia di consegne di questo tipo.

> Studente 1: *Vogliono dire tutti la stessa cosa ma in modi diversi, ad esempio vogliono far capire che i rettangoli isoperimetrici al quadrato sono infiniti, ma con il disegno e il ritaglio si capisce di meno perché uno non ne riesce a disegnarne infiniti, invece con la mente e i numeri si riesce ad andare avanti all'infinito.*

Lo studente 1 nella sua risposta pone l'accento su un'evoluzione degli approcci in termini di generalità. È dunque presente la dimensione *epistemica*.

> Studente 2: *Nel 1° approccio ho capito bene cosa voleva dire rettangoli isoperimetrici […]*
> *Nel 2° approccio ho capito bene qual era il rettangolo con l'area più grande perché sovrapponendo i cartoncini creati da noi un gruppo ha creato un quadrato che è un particolare rettangolo. Abbiamo capito che ha l'area maggiore.*
> *Nel 3° approccio abbiamo specificato meglio perché il quadrato ha l'area più grande […].*

Lo studente 2 individua un percorso che va dalla scoperta alla spiegazione. Si nota un accento sulla dimensione *teleologica*: lo studente illustra *a che cosa serve* ogni approccio.

Studente 3: *Preferisco il terzo approccio anche se era il più difficile. Anche se era più complesso sono riuscita a capire grazie a quello. Ossia il rettangolo che si sovrappone al quadrato con l'avanzo.*

Lo studente 3 risponde in termini di comprensibilità e efficacia degli approcci, quindi il collegamento è con la dimensione teleologica e comunicativa.

Studente 4: *Il primo approccio per me è stato poco utile perché visto che lo facevamo con una misura precisa non so se quello che capisco possa essere applicato su ogni rettangolo, inoltre è stato poco utile perché solo disegnando non si riusciva a vedere niente di particolare e se lo si vedeva lo si notava difficilmente.*
Il secondo metodo è stato molto utile perché a tutti è venuta l'idea di sovrapporli per vedere qual era quello con l'area maggiore e si è capito che è il quadrato e anche grazie a una specie di scaletta con il quadrato come punto di partenza e ogni gradino era un rettangolo con base maggiore ma altezza minore del quadrato. Così facendo però non si capisce il perché del fatto che il quadrato è il rettangolo con area maggiore.
Il terzo metodo è stato il più importante perché ha dato una motivazione al fatto che il quadrato è il rettangolo con area maggiore.

Lo studente 4 presenta una risposta ricca di spunti. In primo luogo la sua risposta permette di distinguere ulteriormente tra una razionalità dell'esplorare e congetturare e una razionalità del dimostrare. Per quanto riguarda la razionalità del dimostrare, rientrano nella dimensione epistemica e teleologica le considerazioni sulla generalità e funzione di spiegazione. Interessante anche il fatto che lo studente abbia colto che la manipolazione di figure prepara la strada alla dimostrazione algebrica.

Studente 5: *Nella parte coi cartoncini ho capito bene che le figure che hanno lo stesso perimetro non hanno per forza la stessa area. L'ho capito bene perché l'abbiamo dimostrato visivamente senza dover scrivere in lettere la risposta.*

Lo studente 5, a differenza dei precedenti, non identifica una evoluzione "positiva" degli approcci e segnala la sua predilezione per il metodo manipolativo. La manipolazione di cartoncini è vista come maggiormente efficace (*ho capito bene*), mentre la parte di discorso metamatematico sulla necessità di arrivare ad una dimostrazione generale non sembra essere stata colta. Si può rilevare qui una dimensione teleologica e comunicativa non supportata da un'adeguata dimensione epistemica. Significativa in questo senso anche l'ultima frase, che si può interpretare in termini di visione "rituale" dell'algebra (Harel & Sowder, 2007).

L'analisi fornisce numerosi spunti di riflessione per la questione cruciale del primo approccio alla cultura dei teoremi. Ci si può per esempio chiedere se il fatto di presentare la sequenza di approcci, che culmina con la dimostrazione algebrica, non rischi di sminuire l'importanza dei primi due approcci e "imporre" il terzo. Alcuni studenti, come lo studente 5, sembrano in effetti vivere il passaggio alle lettere come un "rito" imposto che però non favorisce la comprensione. D'altra parte, altri studenti sembrano cogliere il doppio valore del lavoro su cartoncino: non solo fa scoprire la proprietà, ma prepara la strada alla dimostrazione per via algebrica. La riflessione a livello metamatematico che emerge riguarda in effetti non solo la dimostrazione, ma anche l'esplorazione e produzione della congettura.

Conclusioni

In questo contributo abbiamo affrontato il tema dell'avvio al dimostrare come comportamento razionale nella scuola secondaria di primo grado. Dopo aver illustrato il quadro teorico di riferimento, con particolare attenzione al costrutto di comportamento razionale, abbiamo analizzato la progettazione e implementazione di un percorso didattico caratterizzato da particolari attività di riflessione sulla razionalità del dimostrare, inteso come processo volto alla creazione di un prodotto sottoposto ai criteri di accettabilità della comunità di riferimento. L'analisi fine si è concentrata sull'ultima consegna, che richiede agli studenti di ripercorrere e dunque dare un senso al percorso compiuto. Le risposte sono state analizzate in termini di dimensioni della razionalità: la dimensione epistemica si lega al diverso statuto dei registri (disegno, figura manipolabile, linguaggio algebrico); la dimensione teleologica si lega invece alla diversa funzione dei registri (euristica nei suoi due aspetti: produzione della congettura e produzione della dimostrazione; dimostrativa nei suoi due aspetti di convincimento e spiegazione); la dimensione comunicativa si riferisce soprattutto alla comunicazione con se stesso (comprensibilità). L'analisi mostra l'utilità di una consegna retrospettiva, utile tanto agli studenti (incoraggiati così a dare un senso all'intero percorso) quanto agli insegnanti, che raccolgono un importante feedback sulle attività proposte e possono decidere come meglio proseguire, in un'ottica di valutazione formativa. A tal proposito, ci sembra doveroso concludere con una riflessione sul ruolo cruciale giocato dall'insegnante, professionista riflessivo impegnato nelle fasi di progettazione, implementazione e analisi a posteriori.

BIBLIOGRAFIA

BALACHEFF N. (1982). Preuve et démonstration en Mathématiques au college. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 3(3), 261-304.

BARTOLINI BUSSI M., BONI M. & FERRI F. (1995). Interazione sociale e conoscenza a scuola. Rapporto tecnico n. 10, Centro di Documentazione Educativa, Modena.

BOERO P. (2007). Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice. Sense Publishers, Rotterdam.

BOERO P., DOUEK N., MORSELLI F. & PEDEMONTE B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. Proc. 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME, Belo Horizonte, 1, 179-209.

DURAND-GUERRIER V., BOERO P., DOUEK N., EPP S.S. & TANGUAY D. (2012). Argumentation and proof in the Mathematics classroom. In Proof and proving in Mathematics Education (a cura di G. Hanna & M. de Villiers). New ICMI Study Series 15, Springer Science + Business media B.V., 349-367.

HAREL G. & SOWDER L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In Second handbook of research on mathematics teaching and learning (a cura di F.K. Lester). Information Age Publishing, Greenwich CT, 805-842.

MORSELLI F. (2009). Il processo dimostrativo in una prospettiva culturale. InConferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2008-2009 (a cura di F. Ferrara, L. Giacardi & M. Mosca). Kim Williams Books, Torino, 63-82.

MORSELLI F. (2013). The "Language and argumentation" project: researchers and teachers collaborating in task design. In Proceedings of ICMI Study 22 – Task design in mathematics education (a cura di Watson et al.), 487-496.

MORSELLI F. (2015). La razionalità del dimostrare nella scuola secondaria di primo grado. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38, 279-298.

MORSELLI F. & BOERO P. (2009). Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education (a cura di F.L. Lin et al.). Normal University, Taipei, Taiwan, 2, 100-105.

MORSELLI F. & BOERO P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding of algebraic language. In Early algebraization (a cura di J. Cai & E. Knuth). Springer, Berlin, Heidelberg, 453-481.

MORSELLI F. & LEVENSON E. (2014). Functions of explanations and dimensions of rationality: combining frameworks. Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 250-257.

MORSELLI F. & TESTERA M. (2010). L'argomentazione in matematica. Scuola italiana moderna, n. 2, 35-36.

MORSELLI F., PANUCCI E. & TESTERA M. (2015). Démarche d'investigation et explication au collège. Recherches en éducation, 21, 138-151.

MORSELLI F., SIBILLA A. & TESTERA M. (2015). Lo sviluppo delle competenze argomentative nella scuola secondaria di primo e secondo grado. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38, 548-565.

STYLIANIDES A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 289–321.

WEBER K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. The Journal of Mathematical Behavior, 24(3), 351-360.

Francesca Morselli
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Genova
morselli@dima.unige.it

Monica Testera
Istituto Comprensivo di Carcare (SV)
mrossom@libero.it