Imparare la matematica con Number Worlds: un intervento quinquennale nella scuola primaria

Elisa Bisagno [1] **- Sergio Morra** [2]

[1] *Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia - Department of Law (Italy)*

[2] *Università di Genova - Department of Education (Italy)*

DOI: https://dx.doi.org/10.7358/ecps-2021-023-bimo

elisa.bisagno@unimore.it
morra@nous.unige.it

LEARNING MATH WITH NUMBER WORLDS: A FIVE-YEAR INTERVENTION IN PRIMARY SCHOOL

Abstract

The Number Worlds (NW) program is based on Case's theory of cognitive development and conceptual learning, and it promotes the learning of mathematical concepts through playful-manipulative activities and respecting children's level of development. This five years-research is meant to develop an Italian adaptation of the program, compare it with traditional teaching, and determine the impact of working memory (WM) on math learning. 56 primary school children participated in the research. Since grade I, 13 pupils (controls) followed traditional teaching of math; 43 children worked with NW, 3 hours a week for 7 months. The pupils were assessed with two WM tests, the Number Knowledge Test (NKT), and the Number Line Estimation Task (NLET) at the beginning of Grade I and at the end of each Grade. At the end of Grade V, the AC-MT battery was also administered. The experimental group improved more than controls on the NKT and NLET from Grade I to IV. At the end of Grade V, both groups showed a «ceiling effect» in the NKT and NLET performance. However, a difference in favour of the experimental group was found in some AC-MT tasks. WM, together with the curriculum, was predictive of mathematics performance up to class IV.

Keywords: Central Conceptual Structures; Math learning; Primary school; Working memory.

1. Introduzione

L'apprendimento della matematica è oggetto di numerosi studi che indagano le abilità cognitive coinvolte, considerando prerequisiti dominio-specifici (Chu & Geary, 2015), abilità cognitive generali quali l'intelligenza, l'attenzione o la memoria di lavoro (Friso-van der Bos *et al.*, 2013), o entrambi (Geary *et al.*, 2017). D'altra parte, recenti ricerche hanno dimostrato come già dai primi anni di scuola l'apprendimento della matematica possa essere ostico per i bambini, fino a comportare sindromi ansiose legate alla prestazione in compiti matematici (Hill *et al.*, 2016). È quindi importante non solo approfondire come si sviluppi la padronanza dei concetti numerici, ma anche individuare modalità con cui agevolarne l'apprendimento e renderlo un'esperienza piacevole. A tal proposito, Case e colleghi hanno proposto un modello di sviluppo dei concetti numerici (Case & Okamoto, 1996; Griffin & Case, 1997; Moss & Case, 1999) che è anche la base teorica di nuovi metodi di insegnamento.

Il modello si basa sulla teoria delle strutture concettuali centrali (SCC: Case, 1992), reti di nodi semantici relative a un dominio di conoscenza e fondamentali per l'apprendimento in quel dominio: un esempio è la SCC quantitativa. Nonostante la sua specificità, lo sviluppo della SCC quantitativa consente al bambino di affinare o riorganizzare le sue rappresentazioni in svariati ambiti. A sua volta lo sviluppo delle SCC, indipendentemente dal dominio, è sottoposto a limiti dovuti alla crescita di risorse cognitive generali, come la memoria di lavoro (MdL).

Partendo dall'assunto che un apprendimento efficace si fonda sull'acquisizione di una solida SCC quantitativa, Case e colleghi (Griffin, Case, & Siegler, 1994; Griffin, 2005) hanno sviluppato il programma Number Worlds (NW: «I mondi del numero») per l'insegnamento della matematica dai 4 ai 15 anni. Tale programma, oltre a puntare ad un apprendimento concettuale e non meccanico della matematica, rispetta il livello di sviluppo dei discenti e utilizza attività ludico-manipolative che ne sostengono la motivazione. NW nella scuola primaria ha lo scopo di favorire e consolidare lo sviluppo della SCC del numero intero, comprendere il significato delle operazioni aritmetiche e gettare le basi per la comprensione del numero razionale. Nella presente ricerca è stato adoperato NW per cinque anni (dalla I alla V) con due classi di scuola primaria, per confrontarlo con la tradizionale didattica della matematica. Per «didattica tradizionale» s'intende un insegnamento per lo più frontale, basato più sul libro di testo che su scoperta ed esperienza, e orientato prevalentemente all'applicazione di regole più che alla verifica e comprensione concettuale delle stesse. Inoltre, è stato indagato l'assunto teorico sul ruolo della MdL nello sviluppo della SCC quantitativa.

1.1. *Concetti chiave della teoria di Case*

La teoria neopiagetiana di Case si differenzia da Piaget in primo luogo per la scansione dell'età negli stadi e, in secondo luogo, per il fatto che gli stadi di Case non sono definiti da competenze logiche, ma dal tipo di rappresentazioni cognitive predominanti. Case definisce «stadio dimensionale» il periodo da 5 a 11 anni, poiché emergono nel pensiero del bambino dimensioni quantificabili: non solo concetti matematici e fisici, ma anche la dimensione temporale nel discorso narrativo e la rappresentazione di dimensioni rilevanti dei rapporti sociali.

Entro ogni stadio Case (1992) individua sottostadi contraddistinti da una crescente capacità di MdL. L'incremento quantitativo della capacità di MdL costituisce una condizione necessaria sia per lo sviluppo di abilità e forme di pensiero più articolate nei successivi sottostadi di uno stadio, sia per l'emergere delle rappresentazioni mentali che caratterizzano lo stadio successivo.

Idea fondamentale nel modello di Case (1992; Case & Okamoto, 1996) sono le SCC, reti di concetti e relazioni che sottostanno alla maggior parte dei compiti che i bambini devono padroneggiare. Queste strutture sono «concettuali» perché le unità cognitive che costituiscono la struttura sono dotate di significato, e «centrali» per diverse ragioni. Anzitutto, formano il nocciolo della comprensione di problemi con caratteristiche concettuali simili; inoltre, rappresentano la base per la costruzione successiva di nuove strutture più elaborate; infine, la loro complessità è limitata dalla capacità della MdL. Case (1992) ha infatti ipotizzato che l'aumento della capacità di MdL (o M capacity, come verrà definita d'ora in avanti) consenta al bambino di coattivare un numero maggiore di schemi, per costruire relazioni più complesse tra loro e combinarli in strutture più elaborate. Nello stadio dimensionale, a 5 anni tipicamente i bambini sarebbero in grado di costruire SCC che tengano conto di una sola dimensione alla volta; a 7 anni SCC bidimensionali; e a 9 anni sarebbero in grado di considerare tre dimensioni alla volta (Case, 1992).

Case e Okamoto (1996) hanno offerto un resoconto dettagliato dello sviluppo di tre SCC: sociale, spaziale e quantitativa. L'ultima è essenziale per l'acquisizione dei concetti numerici e l'apprendimento della matematica.

1.2. *La SCC quantitativa e il suo sviluppo*

Il primo ciclo di sviluppo della SCC quantitativa riguarda i numeri naturali e inizia con l'acquisizione di due schemi (Case & Okamoto, 1996; Griffin & Case, 1997). Uno è lo schema del conteggio: la capacità del bambino di pronunciare la sequenza numerica in corrispondenza degli elementi di un insieme e indicarne il numero. L'altro è un concetto intuitivo e analogico di quantità, che permette di comprendere (in termini non numerici) i concetti di «molto» e «poco», di aggiungere e togliere. Entrambi questi schemi possono essere acquisiti intorno ai 4 anni. Essi, però, non sono ancora coordinati: il bambino non sa confrontare due numeri o sommarli, né sa rappresentarseli su una linea numerica mentale. A circa cinque anni la M capacity del bambino è in genere sufficiente per coordinare due schemi; applicando il conteggio al concetto intuitivo di quantità emerge una SCC unidimensionale. Questa è il concetto di linea dei numeri, sufficiente per eseguire confronti e operazioni che nella fase precedente il bambino non poteva concepire, e per risolvere una varietà di problemi di addizione e sottrazione muovendosi avanti o indietro lungo la sequenza. Per distinguere le decine dalle unità si richiede un'informazione aggiuntiva; è quindi necessaria una M capacity di tre unità (tipicamente raggiunta a sette anni). La differenziazione di nuovi elementi diventa possibile e il bambino inizia a pensare in termini di dimensioni distinte, ad esempio ore e minuti, o euro e centesimi, anche se non riesce ancora a fare paragoni tra le varie parti. Per generalizzare la regola del valore posizionale all'intero sistema numerico è necessario un altro schema cognitivo; la M capacity necessaria è di quattro schemi (in genere raggiunta a nove anni). Questo processo di sviluppo è riassunto nella *Tabella 1*.

Tabella 1. – Schema riassuntivo dello sviluppo della SCC quantitativa.

Livello 0 (4 anni)	Il bambino elabora un elemento cognitivo per volta	• Schema del contare • Concetto analogico/intuitivo di quantità	I due schemi funzionano separatamente	M capacity = 1
Livello 1 (6 anni)	Il bambino mette in relazione fra loro due elementi cognitivi	• Linea dei numeri (intervalli di 1 unità) • Contare per sommare/sottrarre	I due schemi si coordinano	M capacity = 2
Livello 2 (8 anni)	Il bambino mette in relazione due elementi cognitivi considerandone due «dimensioni»	Linea dei numeri a due dimensioni (decine + unità)	È tenuta presente una dimensione in più, che consente di lavorare su decine e unità	M capacity = 3
Livello 3 (10 anni)	Il bambino considera in modo integrato le relazioni tra le due dimensioni	Piena comprensione del valore posizionale (numeri a più cifre) e delle operazioni	Comprensione generale del valore posizionale	M capacity = 4

1.3. *Number Worlds per la scuola primaria*

Number Worlds (NW) è un programma atto a facilitare l'acquisizione delle SCC alla base della comprensione del numero. Anche allo scopo di supportare bambini con svantaggio socioeconomico, Case e colleghi strutturarono una ricerca longitudinale di tre anni, in cui un gruppo di bambini svantaggiati, coinvolti nel programma Rightstart (una «prima versione» di NW; Griffin, Case, & Siegler, 1994) veniva confrontato con un gruppo di controllo, anch'esso svantaggiato, e con un gruppo di controllo normativo. I risultati mostrarono che il gruppo Rightstart nell'ultimo anno della scuola dell'infanzia aveva ottenuto, nella comprensione di concetti numerici, un punteggio superiore al gruppo di pari livello socioeconomico, e, a fine I, aveva recuperato nei confronti del gruppo normativo, fino a ottenere un punteggio superiore a quest'ultimo a fine II.

Il curriculum NW (Griffin, Clements, & Sarama, 2007) per la scuola primaria punta all'acquisizione e consolidamento della SCC del numero intero e a gettare le basi per la conoscenza del numero razionale. NW s'inserisce nel processo naturale dello sviluppo cognitivo, senza sovraccaricare cognitivamente gli allievi, rispettandone il livello di sviluppo, facilitando la scoperta dei nessi tra elementi diversi e la costruzione di una rete concettuale ricca di connessioni tra rappresentazioni verbali e analogiche. Il programma offre inoltre l'opportunità di risolvere problemi con strategie diverse, acquisendo fluidità computazionale e comprensione dei concetti presentati. Tra le caratteristiche di NW ricordiamo le seguenti.

- Si basa sulle conoscenze attuali dei bambini: ogni nuova idea è presentata con riferimento a quelle già padroneggiate.
- Si basa su attività cooperative e ludiche, affinché la matematica sia piacevole e motivante. La SCC quantitativa è approcciata in contesti non matematici (es. le tavole da gioco) con struttura analogica, «ponte concettuale fra gli schemi già presenti isolatamente e la struttura più elaborata e integrata che è l'obiettivo finale» (Kalchman & Case, 1998).
- Espone all'isomorfismo tra diverse forme di rappresentazione del numero: non solo il programma è articolato in cinque forme, ma molti dei giochi espongono gli studenti a rappresentazioni multiple (quantità di oggetti o punti, cifre, «salti» lungo la linea numerica e così via), affinché i bambini possano scoprirne gradualmente l'equivalenza.
- Consente al bambino di integrare conoscenze esplicite e implicite, verbali e non verbali.

Ogni attività di NW è divisa in tre momenti: (a) un breve «riscaldamento» dedicato a un gioco coi numeri, (b) un'attività principale e (c) un momento di discussione finale durante il quale i bambini possono confrontare le strategie che hanno adoperato per risolvere un problema o vincere una partita, affinché la conoscenza non sia «impartita» dal docente, ma co-costruita. Sostenuti da scoperte spontanee e motivazione intrinseca, i bambini sviluppano un solido concetto del numero intero.

2. Scopo e ipotesi

Gli scopi di questo studio sono: (a) realizzare un primo adattamento italiano di NW; (b) confrontare l'efficacia del programma con quella della didattica tradizionale; e (c) verificare l'impatto della M capacity, previsto dalla teoria di Case, sugli apprendimenti matematici. Le ipotesi sono:

1. Il programma NW dovrebbe risultare più efficace della didattica tradizionale poiché basato sull'apprendimento concettuale e per il suo «potere motivazionale».
2. Le differenze individuali nella M capacity dovrebbero predire significativamente l'apprendimento della matematica.

3. Metodo

3.1. *Partecipanti*

Hanno preso parte alla ricerca 64 bambini a sviluppo tipico iscritti in scuole primarie di Genova; 8 sono stati esclusi dalle analisi perché non hanno frequentato la classe di riferimento per tutti e cinque gli anni (N = 7) o per una diagnosi di disabilità cognitiva (N = 1). Il campione finale comprende 56 bambini (31 femmine); due classi sperimentali (N = 43) hanno utilizzato NW dal 2014/15 al 2018/19, una classe di controllo (N = 13) ha seguito la didattica tradizionale. Tutti i bambini sono stati valutati a inizio I (dicembre 2014, età media 78 ±3 mesi) e a giugno di ogni anno scolastico, per un totale di sei valutazioni (T1-T6). I genitori di tutti i bambini hanno fornito consenso informato per la partecipazione alla ricerca.

3.2. *Materiali e procedura*

I bambini sono stati valutati in sessioni individuali di 30-50 minuti. I compiti sono stati presentati in ordine fisso, prima i test di M capacity, poi quelli matematici: Number Knowledge Test (NKT) e, dalla classe II, Number Line Estimation Task (NLET). In classe I si sono usati anche un compito di conservazione del numero e la BIN 4-6. A fine V è stata anche somministrata la batteria AC-MT 6-11. Le due prove adoperate per la misurazione della M capacity, il Mr. Cucumber Test e il Backward Word Span, sono coerenti con la teoria di Case e hanno criteri di scoring affini; il Mr. Cucumber impiega materiale visuo-spaziale e il BWS verbale, permettendo così di controllare task impurity e variabilità nello stile cognitivo.

Mr. Cucumber Test (Case, 1985). Si mostra la figura di un «alieno» sulle cui parti del corpo vi sono alcuni bollini colorati: il bambino deve memorizzarne la posizione. Il livello (numero dei bollini per item) varia da 1 a 8. Si assegna 1 punto per ogni livello consecutivo in cui almeno 2 item su

3 sono corretti; ogni eventuale risposta corretta in item di livello superiore riceve 1/3 di punto.

Backward Word Span (BWS: Morra, 1994). Il testista legge una stringa di parole semanticamente non correlate, una al secondo, e il bambino deve ripeterle in ordine inverso. Vi sono 3 item per livello (da 2 a 7 parole). Per default si considera superato il livello 1; nei successivi, il punteggio è attribuito come nel Mr. Cucumber.

Number Knowledge Test (NKT: Griffin, 2009). Sviluppato all'interno dello stesso quadro teorico di NW, il NKT indaga la comprensione concettuale del numero naturale. Comprende 36 item, in 5 livelli di complessità concettuale crescente.

a. Livello 0: 5 item che testano il conteggio entro il 10 o il confronto percettivo tra quantità, cioè gli schemi di base per la comprensione del numero intero (es. mostrare una disposizione di 3 gettoni rossi e 4 gialli, dicendo: «Conta solo quelli gialli e dimmi quanti sono»).
b. Livello 1: 9 item relativi alla comprensione della linea numerica per numeri a una cifra (es. «Quale numero è più grande, 5 o 4?»).
c. Livello 2: 9 item affini a quelli del livello 1, ma relativi alla comprensione dei numeri due cifre (es. «Quale numero è più grande, 32 o 28?»).
d. Livello 3: 7 item che indagano la comprensione di numeri più elevati e/o la capacità di considerare due dimensioni quantitative in modo integrato, come nel calcolo mentale di somme con riporto (es. «Quanto fa 13 + 39?»).
e. Livello 4: 6 item che riguardano il calcolo mentale di moltiplicazione e divisione (es. «Quanto fa 52 per 4?») e l'iniziale comprensione di numeri negativi e razionali (es. «Quale numero è più vicino a 1, -0,2 o 1,8?»).

Le domande sono poste oralmente, alcune con l'ausilio di immagini o gettoni. Il test è interrotto se il bambino risponde erroneamente a più di due terzi degli item di un livello. Dal NKT si ricavano due punteggi: (1) il totale di item corretti su 36, e (2) un punteggio «di livello», il livello più alto in cui il bambino risponde correttamente almeno alla metà degli item. L'attendibilità del NKT è molto elevata (Morra *et al.*, 2019).

Number Line Estimation Task (NLET: Siegler & Opfer, 2003). Si mostra una serie di fogli su cui è stampata una linea di 20 cm delimitata da due numeri (es. 0 e 100). Compito del bambino è indicare, tracciando un segno, la posizione di un dato numero (es. «Dove va 74?»): ciò fornisce un'indicazione sulla sua rappresentazione delle grandezze numeriche. Si è somministrato il NLET a partire dalla II con linee 0-100 (5 item) e 0-1000 (5 item), e dalla III per le frazioni con linee 0-1 (4 item). Si è misurata per ogni item la distanza tra il punto segnato dal bambino e la posizione corretta; si è poi calcolato per ogni tipo di linea (0-100, 0-1000, 0-1) l'errore medio.

Conservazione del numero. Classico compito piagetiano, verifica se il bambino riconosca l'uguaglianza numerica di due insiemi senza farsi «ingannare» da indizi percettivi. Si è usata la procedura di Camba (2014), limitandosi a due item (con numeri 6 e 7), attribuendo 1 punto per risposta corretta.

Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica BIN 4-6 (Molin, Poli, & Lucangeli, 2007). Consente di valutare le basi della conoscenza numerica. Abbiamo usato 5 subtest:

a. Uno/tanti: il bambino deve completare oralmente frasi che indagano il concetto di appartenenza (es. «Una classe è formata da tanti …»). Gli item sono 6, si valuta 1 punto ogni risposta corretta.
b. Ordine di grandezza: il bambino deve ordinare dal più grande al più piccolo cinque cestini, e inserire all'interno di una sequenza di grandezza di palline quella mancante. Ogni posizione corretta vale 1 punto, per un massimo di 7.
c. Completamento di seriazioni: il bambino deve completare cinque sequenze numeriche 1-4, nominando il/i numero/i mancante/i (es. «1 _ 3 4»). Si attribuisce 1 punto per ogni risposta corretta.
d. Confronto tra quantità: si mostrano al bambino due carte che raffigurano da 1 a 9 punti e gli si chiede in quale ci sono più pallini. Vi sono 10 item; ogni risposta esatta vale 1 punto.
e. Enumerazione indietro: si chiede al bambino di contare indietro da 10 a 1. Si attribuisce 1 punto per ogni numero corretto nella sequenza.

Batteria AC-MT 6-11 (Cornoldi, Lucangeli, & Bellina, 2002). La batteria AC-MT per la scuola primaria include due tipologie di prove. Le prove collettive sono:

a. Operazioni scritte: analizzano le procedure di calcolo scritto.
b. Giudizio di numerosità: valuta la comprensione semantica e il confronto tra quantità.
c. Trasformazione in cifre: valuta la capacità di elaborare la struttura sintattica del numero.
d. Ordinamento di numerosità dal minore al maggiore.
e. Ordinamento di numerosità dal maggiore al minore: questa prova e la precedente valutano ancora la comprensione semantica del numero e la comprensione del valore posizionale.

Per le prove collettive ogni risposta corretta vale 1 punto; la somma dei punteggi alle prove *b*, *c*, *d*, *e* fornisce un indice di «conoscenza numerica».

Le prove individuali sono descritte di seguito.

a. Calcolo a mente: valuta l'abilità nell'applicare strategie di calcolo mentale.
b. Calcolo scritto: valuta l'abilità nell'applicare procedure.
c. Enumerazione: valuta la comprensione della sequenza numerica.

d. Dettato di numeri: valuta i meccanismi sintattici e lessicali legati alla produzione dei numeri.
e. Recupero di fatti numerici: valuta gli automatismi di calcolo.

Nelle prove individuali sono conteggiati errori e tempi di risposta. I punteggi sintetici sono «accuratezza», cioè il totale degli errori e «tempo totale», somma di tutti i parziali delle singole prove. Vi sono poi cinque «problemi aritmetici» per valutare il *problem solving*. Per ciascun problema si valuta 0 o 1 a seconda della correttezza nella risoluzione; si assegna 0.5 in caso di errori marginali (es. procedure corrette con errori di calcolo). Abbiamo somministrato la batteria AC-MT a fine V per avere un'ulteriore prova di abilità matematica non sviluppata entro la cornice teorica di riferimento dello studio.

3.3. *L'intervento con il programma Number Worlds*

L'intervento con NW nelle classi sperimentali ha coperto un quinquennio (a.s. 2014/15 - 2018/19), per circa sette mesi all'anno (novembre-maggio, tranne il primo anno, in cui si è iniziato a gennaio). Gli interventi, in affiancamento e parziale sostituzione della didattica tradizionale, si sono svolti due giorni a settimana, per circa un'ora e mezza l'uno. Ogni anno scolastico si sono svolte tra 25 e 35 attività. In ogni intervento, un'attività di NW veniva sviluppata in tutte le sue parti: attivazione (15 minuti), attività principale (circa un'ora) e discussione (15 minuti). Le schede originali NW sono state tradotte e discusse con le docenti, scegliendo le più adeguate alla programmazione annuale e più stimolanti per i bambini. Le attività sono state condotte dall'insegnante di classe, affiancata da almeno un/a laureato/a o laureando/a in psicologia.

4. Risultati

4.1. *Analisi preliminari*

I punteggi di BWS e Mr. Cucumber a T1 (inizio I) erano significativamente correlati, $r = .43$, $p < .001$, anche parzializzando l'età, $r = .42$, $p < .001$, coerentemente con Morra *et al.* (2019) e con l'assunzione che le due prove siano misurate sulla stessa scala. Abbiamo perciò calcolato la M capacity come media tra Mr. Cucumber e BWS.

Tabella 2. – Statistiche descrittive relative alle variabili considerate.

Classe	M capacity		NKT TOT		NKT livello		NLET 0-100 errore		NLET 0-1000 errore		NLET 0-1 errore	
	M	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*
Inizio I	2.67	.65	14.05	3.62	1.07	.57	–	–	–	–	–	–
Fine I	2.96	.56	17.25	4.67	1.42	.65	–	–	–	–	–	–
Fine II	3.31	.66	21.75	3.84	2.55	.57	1.69	.78	2.39	1.37	–	–
Fine III	3.60	.62	27.38	4.81	2.97	.82	1.45	.69	2.04	1.32	3.33	2.04
Fine IV	4.40	.77	30.75	4.26	3.46	.83	1.36	.58	1.80	1.09	3.40	2.47
Fine V	4.32	.83	30.95	3.54	3.55	.73	1.16	.63	1.81	1.22	2.69	2.00

Classe	Conservazione del numero		BIN 4-6 TOT		AC-MT operazioni scritte		AC-MT conoscenza numerica		AC-MT ind. errori		AC-MT ind. tempo		AC-MT problemi	
	M	*Ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*ds*	*M*	*Ds*
Inizio I	1.370	.780	35.683	3.601	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fine I	1.650	.577	37.183	1.589	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fine II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fine III	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fine IV	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fine V	–	–	–	–	5.790	1.830	18.581	2.571	5.613	5.466	151.258	64.089	4.008	2.151

Tabella 3. – Correlazioni tra le variabili suddivise da T1 a T6.

INIZIO I						
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	
M capacity [1]		.33**	.21	.21	.37**	
NKT tot. [2]	.34**		.85**	.40**	.42**	
NKT liv. [3]	.21	.86**		.38**	.41**	
Cons. num. [4]	.21	.40**	.38**		.22	
BIN 4-6 [5]	.37**	.42**	.42**	21		
FINE I						
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	
M capacity [1]		.52**	.48**	.28*	.42**	
NKT tot. [2]	.51**		.89**	.35**	.47**	
NKT liv. [3]	.39**	.89**		.35**	.40**	
Cons. num. [4]	.26*	.33*	.33*		.44**	
BIN 4-6 [5]	.44**	.49**	.44**	.45**		
FINE II						
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	
M capacity [1]		.33*	.26*	-.14	-.36**	
NKT tot. [2]	.31*		.70**	-.21	-.38**	
NKT liv. [3]	.23	.70**		-.29*	-.37**	
0-100 err. [4]	-.08	-.17	-.24		.35**	
0-1000 err. [5]	-.34**	-.36**	-.35**	.32**		
FINE III						
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
M capacity [1]		.43**	.27*	-.21	-.06	-.24
NKT tot. [2]	.43**		.75**	-.55**	-.49**	-.39**
NKT liv. [3]	.26*	.75**		-.26*	-.40**	-.24
0-100 err. [4]	-.23	-.55**	-.30*		.46**	.17
0-1000 err. [5]	-.08	-.50**	-.41**	.45**		.21
0-1 err. [6]	-.27*	-.40**	-.26*	.20	.16	
FINE IV						
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
M capacity [1]		.47**	.45**	-.38**	-.36**	-.07
NKT tot. [2]	.45**		.87**	-.29*	-.54**	-.46**
NKT liv. [3]	.42**	.86**		-.26*	-.45**	-.36**
0-100 err. [4]	.-.32*	-.28*	-.24		.50**	.02
0-1000 err. [5]	-.34**	-.51**	-.42**	.50**		.28*
0-1 err. [6]	-.06	-.46**	-.36**	.02	.27*	

FINE V											
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
M capacity [1]		.35**	.29*	-.34**	-.36**	-.38**	.36*	.14	-.55**	-.47**	.32*
NKT tot. [2]	.35**		.85**	-.15	-.22	-.49**	.29*	.31*	-.69**	-.51**	.48**
NKT liv. [3]	.29*	.86**		-.11	-.34**	-.48**	.23	.24	-.68**	-.49**	.40**
0-100 err. [4]	-.36**	-.16	-.11		.27*	.29*	.04	-01	-32*	.17	-.05
0-1000 err. [5]	-.36**	-.29	-.34**	.29*		.40**	-.20	-.27*	.57**	.50**	-.25*
0-1 err. [6]	-.38**	-.49**	-.48**	.29*	.40**		-.27*	-.18	.60**	.36**	-.30*
MT op.sc. [7]	.33*	.30*	.23	.05	-.21	-.27*		.37**	-.38**	-.38**	.28*
MT conos. [8]	.15	.31*	.24	-.01	-.27*	-.18	.37**		-.33**	-.28*	.33**
MT ind.err. [9]	-.55**	-.69**	-.69**	.33**	.56**	.60**	-.38**	-.33**		.78**	-.51**
MT ind.t. [10]	-.46**	-.51**	-.50**	.19	.50**	.37**	-.39**	-.29*	.78**		-.50**
MT prob. [11]	.31*	.48**	.42**	-.08	-.25	-.30*	.29	.34**	-.51**	-.49**	

Nota: * = $p < .05$; ** = $p < .01$ two-tailed. Le correlazioni di Pearson sono rappresentate sulla diagonale superiore, quelle parzializzate rispetto all'età sulla diagonale inferiore.

La *Tabella 2* presenta, per ognuno dei sei tempi (T1-T6, inizio I - fine V), le statistiche descrittive di M capacity, NKT, NLET e prove AC-MT; la *Tabella 3* presenta le correlazioni di Pearson e parziali tra tutte le prove suddivise da T1 a T6.

La M capacity a inizio I presenta una differenza a favore del gruppo di controllo (media = 3.21) sul gruppo sperimentale (media = 2.50), statisticamente significativa ($t = 2.88$, $p < .05$), a indicare che il gruppo sperimentale partiva con un «equipaggiamento» un po' inferiore in termini di M capacity. Anche il punteggio medio al compito di conservazione a inizio I indicava una prestazione migliore ($t = 2.03$, $p = .05$) da parte del gruppo di controllo (1.69) rispetto a quello sperimentale (1.26). Il punteggio alla BIN per entrambi i gruppi era quasi a soffitto, ma anche in questo si è riscontrata una superiorità ($t = 3.47$, $p < .01$) del gruppo di controllo (37.54 vs 35.33). Anche nel numero di item corretti al NKT i bambini della classe di controllo hanno una media (16.54) migliore rispetto alle classi sperimentali (13.30; $t = 3.03$, $p < .01$). Peraltro, entrambi i gruppi si collocano leggermente al di sopra della media italiana di 12.82 item e 0.85 di livello durante la classe I (Morra *et al.*, 2019).

La M capacity correla significativamente sia col numero di risposte corrette al NKT (da $r = .33$, $p < .05$ a $r = .52$, $p < .001$ nei vari anni), sia col livello superato. A inizio I la prova di conservazione correla sia con le risposte corrette sia col livello NKT ($r = .40$ e $r = .38$, $p < .001$). La BIN correla con la prestazione al NKT (r = .37 per le risposte corrette e .42 per il livello; p < .001) e con la M capacity (r = .42, p < .001). Riguardo al NLET, l'errore medio sulle linee 0-100 e 0-1000 appare diversamente correlato, di anno in anno, sia alle altre prove di matematica, sia alla M capacity; l'errore sulla linea delle frazioni 0-1, invece, mostra una correlazione variabile con la M capacity, ma una stabile relazione negativa con le risposte corrette al NKT (correlazioni da -.40 a -.49 dalla classe III alla V). Infine, tra le prove AC-MT, gli errori e il tempo nelle prove individuali sono le variabili con la maggiore correlazione (negativa) sia con le risposte corrette al NKT (correlazioni da -.51 a -.69, p < .001), sia con la M capacity (correlazioni da -.46 a -.55, p < .001).

4.2. *Analisi principali*

Per testare l'ipotesi che il programma NW sia più efficace rispetto alla didattica tradizionale abbiamo eseguito un'ANOVA del numero di risposte corrette al NKT, con curriculum come fattore *between* e tempo (T1-T6) come fattore *within*. Tutte le classi hanno progredito nel quinquennio, F(5; 270) = 260.80, p < .001, η^2 = .81, sia per il naturale sviluppo, sia per aver ricevuto un insegnamento. Il risultato cruciale per questo studio è l'interazione tempo-curriculum significativa, F(5; 270) = 6.98, p < .001, η^2 = .12: vi è una differenza nel corso del tempo in base al curriculum. I contrasti basati sulle differenze entro ciascuna coppia di tempi successivi mostrano che l'impatto maggiore di NW si riscontra durante le classi I, F(1; 54) = 8.64, p < .01, η^2 = .14, e III, F(1; 54) = 15.30, p < .001, η^2 = .22. In *Figura 1* si nota come il gruppo sperimentale, pur svantaggiato inizialmente, sia progredito più del gruppo di controllo, ottenendo a fine I una media lievemente superiore (17.56 vs 17.46 risposte corrette). A fine III il gruppo sperimentale passa da 22.30 a 28.56 risposte corrette, migliorando di 6.26 item, mentre il gruppo di controllo ha un miglioramento di 4.62 item. Tali differenze sono amplificate se viene inserita la M capacity iniziale a covariata, F(5; 265) = 9.86, p < .001, η^2 = .16: infatti essendo il gruppo di controllo, a inizio I, avvantaggiato sul gruppo sperimentale in termini di risorse cognitive generali, controllare questo aspetto rende il miglioramento del gruppo sperimentale ancor più macroscopico. Differenze significative nell'ANOVA, pur meno evidenti, si riscontrano anche a fine II, F(1; 54) = 8.32, p < .01, η^2 =.13, e a fine IV, F(1; 54) = 5.80, p < .05, η^2 =.10, sempre a favore del gruppo sperimentale, mentre dal test dei contrasti non emergono differenze statisticamente significative nell'interazione tempo-curriculum a fine V, F(1; 54) = .58, n.s., η^2 = .01, per quanto sia possibile osservare che, mentre il gruppo sperimentale non è migliorato da fine IV a fine V (avendo raggiunto un *plateau*) il gruppo di controllo ha invece colmato il divario, (31.13 risposte corrette per il gruppo sperimentale, 31.23 per il gruppo di controllo). Risultati analoghi si sono ottenuti anche analizzando il punteggio di livello, in quanto l'interazione tempo-curriculum risulta significativa, $F(5; 270) = 3.30$, $p < .01$, $\eta^2 = .06$, e il test dei contrasti indica il maggiore divario durante la classe III, $F(1; 54) = 8.62$, $p < .001$, $\eta^2 = .14$, quando il gruppo sperimentale è passato da un livello medio al NKT di 2.63 a fine II a 3.16 a fine III, mentre il gruppo di controllo è migliorato di soli .14 punti (da 2.43 a 2.57).

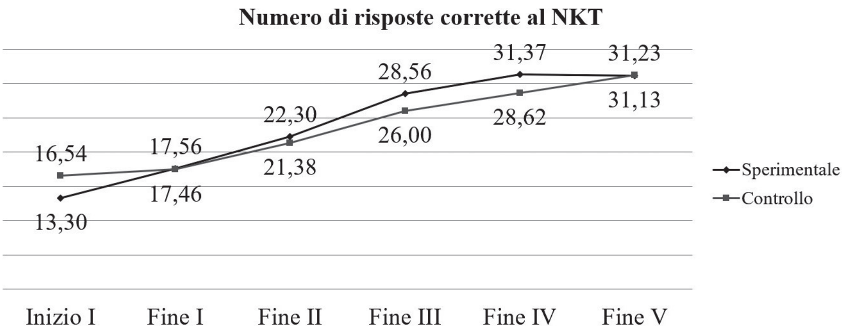

Figura 1. – Numero di risposte corrette al NKT da T1 a T6.

Nel NLET 0-100 si trova solo un effetto del tempo, $F(3; 162) = 12.42$, $p < .001$, $\eta^2 = .19$, ma non dell'interazione tempo-curriculum, $F(3; 162) = .98$, n.s., $\eta^2 = .02$. Anche per la linea 0-1000 si osserva un significativo effetto principale del tempo, $F(3; 162) = 4.27$, $p < .01$, $\eta^2 = .07$, ma l'interazione non è significativa, $F(3; 162) = .78$, n.s., $\eta^2 = .01$. Più interessanti sono i dati relativi alla linea 0-1 (frazioni), somministrata per la prima volta a fine III. Nell'ANOVA si osserva un effetto d'interazione tempo-curriculum, $F(2; 108) = 5.25$, $p < .01$, $\eta^2 = .09$, dovuto al fatto che a fine V, come avviene con il NKT, i bambini del gruppo di controllo «appaiano» la propria prestazione a quella del gruppo sperimentale. Infatti, come si vede in *Figura 2*, già a fine III i bambini del gruppo sperimentale hanno un errore medio al compito di posizionamento delle frazioni (2.72 cm) che è circa la metà di quello del gruppo di controllo (4.99 cm). Le prestazioni dei due gruppi si mantengono stabili a termine IV: in un'analisi di regressione *stepwise* con predittori età, prestazione al NKT, M capacity a fine IV e curriculum, il curriculum emerge come predittore significativo ($\beta = -.24$, $p < .05$) del posizionamento delle frazioni sulla linea 0-1, insieme con il punteggio al NKT ($\beta = -.49$, $p < .001$).

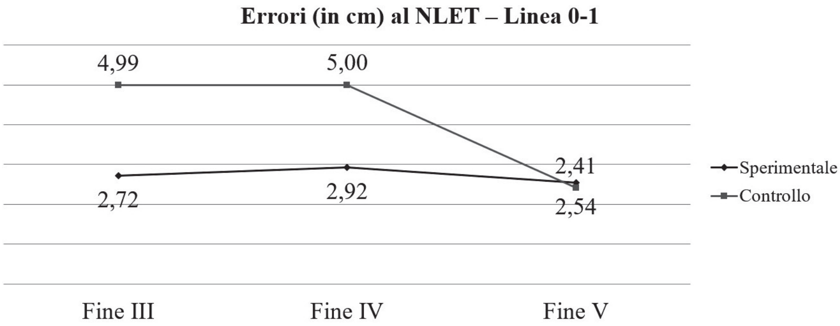

Figura 2. – NLET: errore in cm nel posizionamento delle frazioni sulla linea 0-1 da T4 a T6.

Tabella 4. – Analisi di regressione suddivise per anno scolastico. VD: totale di risposte corrette al NKT.

	Curriculum	M capacity a inizio I	NKT a inizio I
Fine I (R^2 = .51)	β = .39**	β = .26*	β = .63**
Fine II (R^2 = .56)	β = .55**	β = .45**	β = .50**
Fine III (R^2 = .58)	β = .68**	β = .34*	β = .54**
Fine IV (R^2 = .39)	β = .62**	β = .48**	β = .26+
Fine V (R^2 = .26)	β = .32*	–	β = .48**

Nota: * = p < .10; * = p < .05; ** = p < .01.

Infine, i gruppi sperimentale e controllo sono stati confrontati attraverso una serie di t-test sulle prove AC-MT a fine V. Risultano differenze significative nelle operazioni scritte in colonna (t = 3.94, p < .001; media = 6.25 per il gruppo sperimentale e 4.33 per il gruppo di controllo) e nella conoscenza numerica (t = 3.04, p < .01; media = 19.11 per il gruppo sperimentale e 16.93 per il gruppo di controllo). Pur non raggiungendo la significatività, anche nella risoluzione di problemi si evidenzia una leggera superiorità del gruppo sperimentale (4.15 vs 3.60).

Per testare la seconda ipotesi, che la M capacity sia un predittore significativo dell'apprendimento della matematica, abbiamo eseguito una serie di analisi di regressione *stepwise* per identificare i predittori della prestazione dei bambini alla fine di ogni anno scolastico: il punteggio ottenuto anno per anno al NKT è stato usato come variabile dipendente. Come variabili indipendenti sono stati inserite età (variabile di controllo) in primo blocco, e curriculum, prestazione al NKT a inizio I e M capacity a inizio I in secondo blocco (*Tab. 4*). La varianza spiegata è sempre piuttosto consistente (dal 26 al 58%) e la M capacity iniziale del bambino risulta predittiva dell'apprendimento della matematica fino alla classe IV, con un β che varia da .26 (classe I) a .48 (classe IV). Lo stesso avviene per la tipologia di insegnamento adoperata, che però si mantiene predittiva anche a fine V (β compresi tra .32 e .69).

5. Discussione e conclusioni

Il primo risultato rilevante di questo studio è che, a parità di esito generale a fine V, il curriculum NW rispetto alla didattica tradizionale sembra avere consentito agli studenti di conseguire gli obiettivi di apprendimento testati col NKT con un anno di anticipo, e con due anni di anticipo per il valore delle frazioni testato col NLET. Tali risultati sono in linea con quanto già evidenziato da Griffin e colleghi (1994; Griffin & Case, 1997). Gli alunni del gruppo sperimentale a fine V hanno inoltre ottenuto punteggi migliori in alcune prove AC-MT (operazioni scritte in colonna, conoscenza numerica). La superiorità del gruppo sperimentale nelle prove di conoscenza numerica è spiegabile con le caratteristiche di NW, sviluppato per agevolare la comprensione concettuale del numero intero (Griffin, 2005). Per quanto non raggiunga la significatività, si può ipotizzare che performance superiore del gruppo sperimentale nella risoluzione di problemi possa essere spiegata dalla modalità di lavoro di NW: ai bambini erano infatti spesso posti complessi quesiti matematici senza una precedente spiegazione formale, per favorire la comprensione attraverso la sperimentazione. Tale modalità potrebbe aver stimolato il *problem solving*. Tale ipotesi dovrebbe tuttavia essere testata in futuro in modo più sistematico. Il risultato sulle operazioni scritte in colonna è più difficile da interpretare, perché la rappresentazione formale delle operazioni non è un aspetto centrale del programma. Si può supporre che una solida comprensione del valore posizionale delle cifre e lo sviluppo di strategie di conteggio, consolidate attraverso il confronto tra pari, abbiano avvantaggiato i bambini del gruppo sperimentale nel calcolo scritto.

Anche i risultati del NLET riguardo al posizionamento dei numeri razionali mostrano una prestazione significativamente superiore nel gruppo sperimentale già a fine III (la prima classe in cui sono state presentate le frazioni); questo divario si mantiene invariato in IV, per essere poi colmato dal gruppo di controllo a fine V. Ancora una volta i dati suggeriscono che il curriculum NW garantisca, a fine V, competenze paragonabili alla didattica tradizionale, anzi consentendo di ottenere una comprensione più precoce del numero razionale. Di più complessa interpretazione sono i dati relativi alle linee 0-100 e 0-1000, per cui non è stata individuata un'interazione tra tempo e curriculum. Nel primo caso si può supporre che il posizionamento dei numeri sulla scala delle decine sia un compito relativamente semplice, che dipende in misura minore dalla modalità di insegnamento. Per quanto concerne invece il posizionamento sulla linea 0-1000 il risultato è più difficile da interpretare, anche alla luce dei risultati alle prove AC-MT che vedono una prestazione superiore del gruppo sperimentale, tra gli altri, nell'indice di conoscenza numerica.

Nonostante i risultati più ambigui del NLET, riteniamo confermata l'ipotesi che il programma NW sia risultato efficace per l'apprendimento di concetti matematici nella scuola primaria (per alcune competenze in misura maggiore della didattica tradizionale), consentendo agli alunni di acquisire alcuni concetti più precocemente.

Riguardo l'ipotesi che le differenze individuali nella M capacity siano un predittore significativo dell'apprendimento matematico, già le correlazioni piuttosto elevate tra M capacity e NKT forniscono un'indicazione della relazione tra le due variabili. Le analisi di regressione indicano che la M capacity a inizio I è un predittore della matematica fino alla classe IV, ma non in V. In generale, escludendo sia la varianza spiegata dalle conoscenze già possedute dai bambini a inizio I sia il ruolo del curriculum, la M capacity ha influenzato l'apprendimento della matematica nel corso del quinquennio. La non predittività della M capacity a fine V potrebbe dipendere dai risultati «a soffitto» nel NKT. Pertanto, in accordo con le ipotesi, la M capacity (Griffin & Case, 1997) è risultata un fattore predittivo per lo sviluppo delle abilità matematiche, poiché una maggiore capacità consente di elaborare contemporaneamente una maggiore quantità d'informazioni.

In quanto primo adattamento del curriculum NW alla scuola italiana, questa ricerca presenta alcuni limiti, primo tra tutti l'esiguità del campione di controllo, costituito da un'unica classe, che partiva a inizio I con un vantaggio sulle classi sperimentali in tutte le variabili misurate, e che peraltro è andata incontro nel corso degli anni ad una certa riduzione campionaria. Inoltre, nel tentativo di adattare il curriculum alla didattica della scuola italiana, che differisce da quella americana in termini sia di tempistiche nella trattazione degli argomenti, sia di organizzazione delle lezioni, abbiamo selezionato un numero di attività ridotto rispetto a quanto previsto dal programma originale. Ricerche future consentiranno il superamento di alcuni limiti descritti, attraverso l'aumento dell'ampiezza campionaria e delle attività proposte.

Nonostante questi margini di miglioramento si può già affermare che il programma NW sia efficace per l'insegnamento della matematica nella scuola primaria; inoltre, sebbene non indagato formalmente, un ulteriore vantaggio di NW è rappresentato dalla sua struttura ludica e motivante. Infine, un'importante considerazione applicativa emerge dal ruolo che la memoria di lavoro ricopre quale predittore degli apprendimenti matematici, e può avere valore per tutti i docenti a prescindere dalla modalità d'insegnamento adottata: l'importanza di rispettare, nell'insegnamento, il naturale sviluppo cognitivo individuale, al fine di costruire una solida comprensione concettuale e sostenere il processo di apprendimento.

Riferimenti bibliografici

Camba, R. (2014). La conservazione del numero secondo la teoria della catastrofe. *Giornale Italiano di Psicologia*, *41*, 555-571. doi: 10.1421/78501

Case, R. (1985). *Intellectual development: Birth to adulthood*. New York: Academic Press.

Case, R. (1992). *The mind's staircase: Exploring the conceptual underpinnings of children's thought and knowledge*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Case, R., & Okamoto, Y. (1996). The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *61*(1-2). doi: 10.2307/1166077

Chu, F. W., & Geary, D. C. (2015). Early numerical foundations of young children's mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *132*, 205-212.

Cornoldi, C., Lucangeli, D., & Bellina, M. (2002). *AC-MT 6-11. Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione dei problemi*. Trento: Erickson.

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *10*, 29-44. doi: 10.1016/j.edurev.2013.05.003

Geary, D. C., Nicholas, A., Li, Y., & Sun, J. (2017). Developmental change in the influence of domain-general abilities and domain-specific knowledge on mathematics achievement: An eight-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, *109*(5), 680-693. doi: 10.1037/edu0000159

Griffin, S. (2005). Contributions of central conceptual structure theory to education. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive developmental change: Models, methods, and measurement* (pp. 264-295). Cambridge: Cambridge University Press.

Griffin, S. (2009). Learning sequences in the acquisition of mathematical knowledge: Using cognitive developmental theory to inform curriculum design for Pre-K-6 mathematical education. *Mind, Brain, and Education*, *3*(2), 96-107. doi: 10.1111/j.1751-228X.2009.01060.x

Griffin, S., & Case, R. (1997). Rethinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education*, *3*, 1-65.

Griffin, S., Case, R., & Siegler, R. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 25-49). Cambridge, MA: The MIT Press - Bradford Books.

Griffin, S., Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). *Number Worlds: A prevention/intervention math program*. Columbus, OH: SRA/McGraw-Hill.

Hill, F., Mammarella, I. C., Devine, A., Caviola, S., Passolunghi, M. C., & Szűcs, D. (2016). Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity. *Learning and Individual Differences*, *48*, 45-53.

Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle childhood: An approach based on neo-Piagetian theory. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*, 7-53.

Molin, A., Poli, S., & Lucangeli, D. (2007). *BIN 4-6. Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica in bambini dai 4 ai 6 anni*. Trento: Erickson.

Morra, S. (1994). Issues in working memory measurement: Testing for M capacity. *International Journal of Behavioral Development*, *17*, 143-159.

Morra, S., Bisagno, E., Caviola, S., Delfante, C., & Mammarella, I. C. (2019). Working memory capacity and the development of quantitative central conceptual structures. *Cognition and Instruction*, *37*(4), 483-511.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147. doi: 10.2307/749607

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*(3), 237-250.

Riassunto

Il programma Number Worlds (NW) si fonda sulla teoria dello sviluppo cognitivo e dell'apprendimento concettuale di Case e vuole favorire nei bambini, attraverso attività ludico-manipolative, l'apprendimento di concetti matematici nel rispetto del loro *livello di sviluppo. Questa ricerca, durata cinque anni, si è proposta di realizzare un adattamento italiano del programma, confrontarne l'efficacia con la didattica tradizionale, e determinare l'impatto della memoria di lavoro (MdL) sugli apprendimenti matematici. Hanno partecipato alla ricerca 56 bambini di scuola primaria. A partire dalla I, 13 alunni (controlli) hanno seguito la tradizionale didattica della matematica, 43 hanno lavorato con NW 3 ore alla settimana per 7 mesi all'anno. I bambini sono stati valutati con due prove di MdL e il Number Knowledge Test (NKT) ad inizio I e alla fine di ogni anno e con il Number Line Estimation Task (NLET) a partire dalla classe II. A fine V sono state somministrate anche le prove AC-MT. L'interazione tempo-curriculum indica che i bambini delle classi sperimentali migliorano più dei controlli nella prestazione al NKT e al NLET dalla I alla IV. A fine V entrambi i gruppi hanno raggiunto prestazioni quasi a soffitto in NKT e NLET; ma in alcune prove AC-MT vi è una differenza a favore del gruppo sperimentale. Infine, la MdL e la tipologia di insegnamento adoperata risultano predittive dell'apprendimento della matematica fino alla classe IV.*

Keywords: Apprendimento; Matematica; Memoria di lavoro; SCC; Scuola primaria.

How to cite this Paper: Bisagno, E., & Morra, S. (2021). Imparare la matematica con Number Worlds: un intervento quinquennale nella scuola primaria [Learning math with Number Worlds: A five-year intervention in primary school]. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies*, *23*, 49-69. DOI: https://dx.doi.org/10.7358/ecps-2021-023-bimo